Dinámica de modelo depredador–presa del tipo Leslie

Dynamics of depredatory model - Lesli's prey type

Paulo Cesar Tintinago Ruiz[1]

Recibido: 09/05/2014 - Aceptado: 10/09/2014

Cómo citar este artículo: P. Tintinago "Dinámica de modelo depredador–presa del tipo Leslie", *IngEam*, vol. 2, n.° 2, pp. 161-173, 2015

Resumen

En este trabajo se estudia un modelo presa- depredador del tipo Leslie-Gower con respuesta functional Holling tipo III, descrito por un sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para así determinar las condiciones para la existencia de los puntos de equilibrio.

Palabras clave: sistemas dinámicos, puntos de equilibrio, respuesta funcional

Abstract

Here a continuous-time predator-prey model of Leslie-Gower type with functional response Holling III type is studied, described by an autonomous bidimensional ordinary differential equation system. To determine the conditions for the existence of the equilibrium points.

Keywords: dynamical systems, equilibrium points, functional response

Introducción

En este trabajo se analiza un modelo depredador-presa continuo en el tiempo, teniendo en cuenta dos aspectos importantes para la descripción de la interacción:

1. La función de crecimiento de los depredadores es de tipo logístico.
2. La tasa de consumo de respuesta o depredador funcional es un tipo Holling III.

El aspecto caracteriza tipos de modelos depredador-presa Leslie o modelo logístico presa o modelo Leslie-Gower, en el que, la capacidad de carga ambiental depredador Ky, es una función de la presa de mayor tamaño x, es decir, depende de la disposición de recursos. Aquí se considera que Ky = K (x) = nx+c. Aunque los modelos Leslie pueden llevar anomalías en sus predicciones, porque predice que, incluso a muy baja

[1] Docente de la Universidad del Quindío. Correo electrónico: pctinti@hotmail.com

densidad de la presa, cuando la tasa de consumo de los depredadores individuo es esencialmente cero, la población de depredadores puede, sin embargo, aumentar, si la relación presa es muy pequeña, estos modelos se emplean recientemente en la ecología.

El depredador de respuesta funcional o función de consumo se refiere al cambio en la densidad de presas atacado por unidad de tiempo por depredador, cuando la densidad de presas cambia.

En este trabajo se va a considerar que la respuesta funcional depredador se expresa por la función $h(x) = \dfrac{q\,x}{x^2 + a^2}$

Biológicamente una respuesta funcional sigmoidea explica el hecho de que a bajas densidades de población de la presa del efecto de depredación es baja, pero si aumenta el tamaño de la población, la depredación es más intensiva. Este fenómeno aparece en varias interacciones del mundo real y en este caso se dice que el depredador es generalista, debido al tamaño de la población, si la presa es baja, se busca otras alternativas de alimentos. Las respuestas funcionales sigmoideas pueden surgir de una variedad de mecanismos, uno de los cuales está cambiando a fuentes de alimento alternativas. Desde hace tiempo se sabe que sigmoidea puede estabilizar un equilibrio inestable de otra forma de presas y depredadores en los modelos de Lotka-Volterra, pero se demuestra que esto no sucede en el modelo de Leslie-Gower.

El problema de la determinación de las condiciones que garantizan la singularidad de un ciclo límite o la estabilidad global del equilibrio positivo único en los sistemas presa depredador, ha sido ampliamente estudiada en las últimas tres décadas, a partir de la obra de Cheng, quien fue el primero para demostrar la singularidad de un ciclo límite para un modelo depredador-presa específico con una respuesta funcional Holling tipo II, utilizando la simetría de la isóclina presa. Este tipo de resultados son los que se esperan en un estudio global para sistemas de este tipo [1, 3]. Esto último está relacionado con el problema sin resolver propuesto por el matemático David Hilbert en 1900, y se refiere al número máximo de ciclos límite de un sistema ecuación diferencial de un polinomio bidimensional, cuyo grado debe ser menor que o igual a n [8].

Descripción del problema

Modelo

Los modelos de tipo Leslie son descritos por el sistema de ecuaciones diferenciales bidimensional de la forma:

$$X_\mu : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \left(r\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{qx\,y}{x^2+a^2}\right)x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = s\left(1 - \dfrac{y}{nx+c}\right)y \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Donde x = x (t) e y = y (t) expresan los tamaños de la población de presas y depredadores respectivamente, f(x) = xg(x) es la tasa de crecimiento poblacional (usualmente la función logística), h(x) es la tasa de consumo o respuesta funcional de los depredadores [11] y Ky = k(x)=nx+c, es la capacidad de soporte de los depredadores dependiente del tamaño de la población de presas.

La respuesta funcional es $h(x) = \frac{qx}{x^2+a^2}$, pero otras formas han sido asumidas en trabajos anteriores o topológicamente iguales [4, 5, 6, 8]. Por su parte, la forma más usual para la capacidad de soporte de los depredadores es $K_y = nx$. De este modo se obtiene el sistema de tipo Kolmogorov

Está definido en $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ x \geq 0, y \geq 0\}$

Resultados principales

Lema:

El sistema X_μ es topológicamente equivalente al sistema:

$$Y_n \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \big((1-u)(u^2+A) - Qu\,v\big)(u+C)u \\ \frac{dv}{d\tau} = B(u+C-v)(u^2+A)v \end{cases}$$

Demostración:

Se utiliza la metodología empleada en [4, 5, 7,9,11]

Sea $x = Ku$ e $y = nKv$, luego $\frac{dx}{dt} = K\frac{du}{dt}, y\ \frac{dy}{dt} = nK\frac{dv}{dt}$

$$U_\mu : \begin{cases} K\frac{du}{dt} = \left(r\,(1-u) - \frac{qKu\ nKv}{(Ku)^2+a^2}\right) Ku \\ nK\frac{dv}{dt} = s\left(1 - \frac{nKv}{n\,Ku + c}\right) nKv \end{cases}$$

$$U_\mu : \begin{cases} \frac{du}{dt} = \left(r\,(1-u) - \frac{qu\ nv}{u^2 + \frac{a^2}{k^2}}\right) u \\ \frac{dv}{dt} = s\left(1 - \frac{v}{u + \frac{c}{nK}}\right) v \end{cases}$$

$$U_\mu : \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = r\left((1-u) - \dfrac{qn}{r}\ \dfrac{uv}{u^2 + \dfrac{a^2}{k^2}} \right) u \\ \\ \dfrac{dv}{dt} = s\left(1 - \dfrac{v}{u + \dfrac{c}{nK}} \right) v \end{cases}$$

Reescalamiento del tiempo

Sea $\tau = \dfrac{r}{\left(u+\frac{c}{nk}\right)\left(u^2+\frac{a^2}{k^2}\right)} t,\ luego\ \ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{d\tau}\dfrac{d\tau}{dt}$

$$Y_\mu : \begin{cases} \dfrac{r}{\left(u+\frac{c}{nk}\right)\left(u^2+\frac{a^2}{k^2}\right)}\ \dfrac{du}{d\tau} = r\left((1-u) - \dfrac{qn}{r}\ \dfrac{uv}{u^2 + \dfrac{a^2}{k^2}} \right) u \\ \dfrac{r}{\left(u+\frac{c}{nk}\right)\left(u^2+\frac{a^2}{k^2}\right)}\ \dfrac{dv}{d\tau} = s\left(\dfrac{u + \frac{c}{nk} - v}{u + \frac{c}{nK}} \right) v \end{cases}$$

$$Y_\mu : \begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \left((1-u)\left(u^2 + \dfrac{a^2}{k^2}\right)\left(u + \dfrac{c}{nk}\right) - \dfrac{qn}{r}\ uv\left(u + \dfrac{c}{nk}\right) \right) u \\ \\ \dfrac{dv}{d\tau} = \dfrac{s}{r}\left(u + \dfrac{c}{nk} - v\right)\left(u^2 + \dfrac{a^2}{k^2}\right) v \end{cases}$$

Haciendo la sustitución

$$A = \frac{a^2}{k^2}, Q = \frac{qn}{r}, B = \frac{s}{r}, C = \frac{c}{nk}$$

Así pues, el sistema:

$$Y_n \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \big((1-u)(u^2 + A) - Qu\,v\big)(u + C)u \\ \\ \frac{dv}{d\tau} = B(u + C - v)(u^2 + A)v \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Lema 1

Los puntos de equilibrio del sistema (2) o singularidades del campo Y_n en el primer cuadrante son: $O = (0, 0)$, $Q_1 = (1, 0)$ y los puntos de equilibrio positivo $Q_e = (u_e, v_e)$ determinados por la intersección de las isóclinas $v = u + C$ y $v = \frac{1}{Qu}(1 - u)(A + u^2)$.

Cantidad de puntos de equilibrio positivos en el sistema (2) se tiene:

a1. Un único punto de equilibrio positivo, si y sólo si, $1 - Q \leq 0$.

Demostración

De intersección de las isóclinas $v = u + C$ y $(1 - u)(A + u^2) - Quv = 0$, se obtiene la ecuación

$$(1 - u)(A + u^2) - Qu(u + C) = 0 = (1 - Q)u^2 - u^3 + (-A - CQ)u + A$$

Se tiene que el punto $Q_e = (u_e, v_e)$ satisface la ecuación, $-u^3 + (1 - Q)u^2 - (A + CQ)u + A = 0$, o sea, es solución o raíz del polinomio

$$P(u) = u^3 - (1 - Q)u^2 + (A + CQ)u - A \qquad \textbf{(3)}$$

Usando la regla Descartes se deduce que $P(u)$ puede tener:

ai. una raíz real positiva, si y sólo si $1 - Q \leq 0$,
bi. tres raíces reales positivas diferentes, si y sólo si$1 - Q > 0$.

Al sustituir u por -*u* se obtiene el polinomio

$$P(-u) = -u^3 - (1 - Q)u^2 - (A + CQ)u - A$$

aii. no tiene cambios de signo si y sólo si$1 - Q \geq 0$, por lo cual no habría raíces reales negativas.
bii. Tiene dos raices reales negativas, si y sólo si$1 - Q < 0$.

Se considera que $u_e = H$, la raíz real positiva que siempre existe para $P(u)$ y por $P_e = (H, H)$ el punto de equilibrio que existe en Ω.

Dividiendo el polinomio $P(u)$ por $(u - H)$ se obtiene:

$$\frac{u^3 - (1 - Q)u^2 + (A + CQ)u - A}{u - H} = A + H(H + Q - 1) + u(H + Q - 1) + CQ + \frac{A - H(A + H(H + Q - 1) + CQ)}{H - u} + u^2$$

Se tiene que el residuo de la división es:

$$R(u) = AH + H^2Q - A - H^2 + H^3 + CHQ = H^3 + (Q - 1)H^2 + (A + CQ)H - A,$$

Si $R(u) = 0$ entonces $Q = \frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)}$

Como $Q > 0$, entonces $H < 1$. y $P_1(u) = u^2 + (H + Q - 1)\,u + H(H + Q - 1) + CQ + A =$

Es un factor de $P(u)$.
Recordando que $1 - Q > 0$, el polinomio

$$P_1(u) = u^2 - (1 - Q - H)\,u + CQ + A - (1 - Q - H)$$

Tiene dos raíces reales positivas, si y sólo si, $1 - Q - H > 0$, $CQ + A - (1 - Q - H) > 0$ y además,

$$\Delta = (1 - Q - H)^2 - 4(CQ + A - (1 - Q - H))$$

Las soluciones son:

$$u_2 = \frac{1 - Q - H - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Y

$$u_3 = \frac{1 - Q - H' - \sqrt{\Delta}}{2}. \square$$

Claramente $u_2 < u_3$; además$u_2 = u_3$, si y sólo si, $\Delta = 0$, es decir si y sólo si, $(1 - Q - H)^2 - 4(CQ + A - (1 - Q - H)) = 0$,
Por tanto,

$$A = \left(\frac{1}{4}\right)(1 - Q - H)^2 + (1 - Q - H) - CQ.$$

Observaciones

Los resultados anteriores se pueden simplificar usando la relación para Q, y se tiene.

$$P_1(u) = u^2 - \left(1 - \frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)} - H\right)u + C\frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)} + A - \left(1 - \frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)} - H\right)$$

$$P_1(u) = u^2 - \frac{(1-H)(A-CH)}{H(C+H)}u + \frac{A + AH^2 + 2CH^2 - CH^3 + AC - AH - CH}{H(C+H)}$$

$$P_1(u) = u^2 - \frac{(1-H)(A-CH)}{H(C+H)}u + \frac{-CH^3 + (A+2C)H^2 - (A+C)H + (A+AC)}{H(C+H)}$$

Para la positividad de las soluciones de $P_1(u)$ se debe cumplir que:

$$A - CH > 0 \text{ y } -CH^3 + (A+2C)H^2 - (A+C)H + (A+AC) > 0$$

Luego

$$\Delta = \left(\frac{(1-H)(A-CH)}{H(C+H)}\right)^2 - \frac{-CH^3+(A+2C)H^2-(A+C)H+(A+AC)}{H(C+H)}$$

$$= \frac{-4AH^2-2A^2H+4AH^3-4AH^4+4CH^3-8CH^4+4CH^5+A^2H^2+5C^2H^2-10C^2H^3+5C^2H^4+A^2+4ACH^2-4AC^2H-6ACH^3-6ACH}{H^2(C+H)^2}$$

El numerador debe ser positivo,

$$n(A,C,H) = -4AH^2-2A^2H+4AH^3-4AH^4+4CH^3-8CH^4+4CH^5+A^2H^2 + 5C^2H^2-10C^2H^3+5C^2H^4+A^2+4ACH^2-4AC^2H-6ACH^3 - 6ACH$$

$$= 4CH^5+(5C^2-8C-4A)H^4+(4A+4C-6AC-10C^2)\,H^3+(A^2+4AC-4A + 5C^2)H^2+(-2A^2-4AC^2-6AC)\,H+A^2$$

Lema 2

El conjunto $\bar{\Gamma} = \{(u,v) \in R^2/u \geq 0, v \geq 0\}$ es una región de invarianza.

Prueba

Como el modelo es del tipo Kolmogorov, entonces los ejes $u = 0\ y\ v = 0$ son conjuntos invariantes.

Si $u = 1$ entonces, $\frac{du}{d\tau} = -Qv(1+C) < 0$ y cualquiera que sea el signo de $\frac{dv}{d\tau} = B(u + C - v)(u^2+A)v$ las trayectorias del campo entran a la región $\bar{\Gamma}$.□

Como consecuencia, se tiene que $\Gamma = \{(x,y) \in R^2/x \geq 0, y \geq 0\}$, es una región de invarianza para el sistema (2).

Lema 3

Las soluciones del sistema (2) son acotadas.

Prueba

Luego se usa la compactificación de Poincaré. [2, 6]

Sea $X = \frac{u}{v}$ y $Y = \frac{1}{v}$, entonces,

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{d\tau} - u\frac{dv}{d\tau}\right), \frac{dY}{d\tau} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{d\tau}$$

Luego, el sistema toma la forma:

$$\bar{Y}_n \begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = -\dfrac{X}{Y^4}\begin{pmatrix} -X^3Y + X^4 - ABY^3 - ACY^4 - AXY^3 - BX^2Y + BX^3Y + \\ CX^3Y + QX^2Y + AX^2Y^2 - CX^2Y^2 + ABCY^4 + ABXY^3 + ACXY^3 + CQXY^2 + BCX^2Y^2 \end{pmatrix} \\ \\ \dfrac{dY}{d\tau} = -B(X + CY - 1)\dfrac{AY^2 + X^2}{Y^2} \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos se considera el reescalamiento del tiempo dado por:
$T = \frac{1}{y^4}\tau$; entonces,

$$\bar{Y}_n \begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = -X\begin{pmatrix} -X^3Y + X^4 - ABY^3 - ACY^4 - AXY^3 - BX^2Y + BX^3Y + CX^3Y + QX^2Y \\ +AX^2Y^2 - CX^2Y^2 + ABCY^4 + ABXY^3 + ACXY^3 + CQXY^2 + BCX^2Y^2 \end{pmatrix} \\ \\ \dfrac{dY}{d\tau} = -BY^2(X + CY - 1)(AY^2 + X^2) \end{cases}$$

Luego

$$DY_n(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para desingularizar el origen se aplica el método de blow up, haciendo $X = r$ y $Y = r^2 s$, entonces:

$$\bar{Y}_n = \begin{cases} \dfrac{dr}{dT} = \dfrac{dr}{dT} \\ \\ \dfrac{ds}{dT} = \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{dY}{dT} - 2rs\dfrac{dr}{dT}\right) \end{cases}$$

Entonces

$$\bar{Y}_n = \begin{cases} \dfrac{dr}{dT} = r^5\begin{pmatrix} Bs - Qs + rs - Ar^2s^2 + Ar^3s^3 + Cr^2s^2 - Brs - Crs - CQrs^2 + \\ ABr^2s^3 - ABr^3s^3 - ACr^3s^3 - BCr^2s^2 + ACr^4s^4 - ABCr^4s^4 - 1 \end{pmatrix} \\ \\ \dfrac{ds}{dT} = r^4 s\begin{pmatrix} -Bs + 2Qs - 2rs + 2Ar^2s^2 - 2Ar^3s^3 - 2Cr^2s^2 + Brs + 2Crs + 2CQrs^2 \\ -ABr^2s^3 + ABr^3s^3 + 2ACr^3s^3 + BCr^2s^2 - 2ACr^4s^4 + ABCr^4s^4 + 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Para simplificar un poco, se hace un reescalamiento del tiempo dado por: $\lambda = r^4T$, luego se obtiene el sistema:

$$\bar{Y}_n = \begin{cases} \dfrac{dr}{d\lambda} = r\begin{pmatrix} Bs - Qs + rs - Ar^2s^2 + Ar^3s^3 + Cr^2s^2 - Brs - Crs - CQrs^2 + \\ ABr^2s^3 - ABr^3s^3 - ACr^3s^3 - BCr^2s^2 + ACr^4s^4 - ABCr^4s^4 - 1 \end{pmatrix} \\ \\ \dfrac{ds}{d\lambda} = s\begin{pmatrix} -Bs + 2Qs - 2rs + 2Ar^2s^2 - 2Ar^3s^3 - 2Cr^2s^2 + Brs + 2Crs + \\ 2CQrs^2 - ABr^2s^3 + ABr^3s^3 + 2ACr^3s^3 + BCr^2s^2 - 2ACr^4s^4 + ABCr^4s^4 + 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Entonces

$$D\bar{Y}_n(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que (0,0) es un punto silla del campo de vectores Y_ny $\bar{Y}_n$, para el cual el punto $(0,\infty)$ es silla del campo vectorial compactificado, por lo tanto las orbitas son acotadas. Este resultado implica que el sistema está bien definido, pues si hay pocas presas (x → 0) la población de depredadores también tiende a cero.□

Naturaleza de los puntos de equilibrio sobre los ejes

Para esto se requiere la matriz Jacobiana cuyas componentes son:

$$DY_n(u,v) = \begin{pmatrix} y_n(u,v)_{11} & -Qu^2(C+u) \\ Bv(A+2Cu-2uv+3u^2) & B(C+u-2v)(A+u^2) \end{pmatrix}$$

Con

$$Y_n(u,v)_{11} = 3Cu^2 - 3Au^2 - 4Cu^3 + AC + 2Au + 4u^3 - 5u^4 - 3Qu^2v - 2ACu - 2CQuv$$

$$= -5u^4 + (4-4C)u^3 + (3C-3A-3Qv)u^2 + (2A-2AC-2CQv)\,u + AC$$

Lema 1

La singularidad (1, 0) es un punto silla.

Demostración

En el punto (1, 0) se tiene:

$$Y_n(1,0)^{11} = 3C(1)^2 - 3A(1)^2 - 4C(1)^3 + AC + 2A(1) + 4(1)^3 - 5(1)^4 - 3Q(1)^2v - 2AC(1) - 2CQ(1)v$$

$$= -A - C - AC - 3Qv - 2CQv - 1 - A - C - AC - 1 = -(C+1)(A+1)$$

$$DY_n(1,0) = \begin{pmatrix} -(c+1)(A+1) & -Q(C+1) \\ 0 & B(C+1)(A+1) \end{pmatrix}$$

det $DY_n(1{,}0) = -\mathrm{B}(\mathrm{C}+1)^2(\mathrm{A}+1)^2 < 0$, luego, el punto (1,0) es silla. □

Lema 2

La singularidad (0,0) es un repulsor.

Demostración

La matriz jacobiana evaluada en el origen es:

$$DY_n(0{,}0) = \begin{pmatrix} AC & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix},$$

El det $DY_n(1{,}0) = A^2BC^2 > 0$ y la traza tr $Y_n(1{,}0) = AC + ABC = AC(B+1) > 0$. Luego, el punto (0,0) es un repulsor. □

Lema 3

La singularidad (0, C) es un punto de silla

Demostración

$$DY_n(0, C) = \begin{pmatrix} AC & 0 \\ ABC & -ABC \end{pmatrix},$$

Claramente, $DY_n(0, C) = (0, \mathrm{C}) = -\mathrm{A}^2\mathrm{BC}^2 < 0$. Luego (0,C) es punto silla. □

Naturaleza de los puntos de equilibrio positivos

Así pues, se debe distinguir diferentes casos de acuerdo al lema (0) cuando existan uno, dos o tres puntos de equilibrio al interior del primer cuadrante.

Existencia de un único punto de equilibrio positivo

El único punto de equilibrio es (H,H+C)

Como $Q = \frac{(1-H)(A-H^2)}{H(H-C)}$ entonces el sistema (2) se puede reescribir de la forma:

$$Y_n \begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \left((1-u)(u^2+A) - \dfrac{(1-H)(A-H^2)}{H^2+CH} u\, v\right)(u+C)u \\[2ex] \dfrac{dv}{d\tau} = B(u+C-v)(u^2+A)v \end{cases}$$

La matriz Jacobiana evaluada en (H,H+C)

$$DY_n(u,v) = \begin{pmatrix} Y_n(u,v)_{11} & -Qu^2(C+u) \\ & \end{pmatrix}$$

$$Bv(A+2Cu-2uv+3u^2) \quad B(C+u-2v)(A+u^2)$$

$$DY_n(H,H+C) = \begin{pmatrix} Y_n(H,H+C)_{11} & -\frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)} \ (H^2)\big(C+(H)\big) \\ Bv(A+2C(H)-2(H) \\ (H+C)+3(H)^2) & B(C+(H)-2(H+C))(A+(H)^2) \end{pmatrix}$$

$$B(C+(H)-2(H+C))(A+(H)^2) = -B(A+H^2)(C+H)$$

$$Bv(A+2C(H)-2(H)(H+C)+3(H)^2) = Bv(A+H^2)$$

$$DY_n(H,H+C) = \begin{pmatrix} Y_n(1{,}0)_{11} & -H(1-H)(A+H^2) \\ B(A+H^2)(C+H) & -B(A+H^2)(C+H) \end{pmatrix}$$

$$Y_n(H,H+C)_{11} = -5u^4+(4-4C)u^3+(3C-3A-3Qv)u^2+(2A-2AC-2CQv)\,u+AC$$

$$= -5(H)^4+(4-4C)(H)^3+(3C-3A-3Qv)(H)^2+(2A-2AC-2CQv)\,(H)+AC$$

$$= -5(H)^4+(4-4C)(H)^3+\big(3C-3A-3Q(C+H)\big)(H)^2+\big(2A-2AC-2CQ(C+H)\big)(H)+AC$$

$$= -5H^4+\left(4-3\frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)}-4C\right)H^3+\left(3C-3A-5C\frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)}\right)H^2 + \left(2A-2AC-2\frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)}C^2\right)H+AC$$

$$= -2H^4+(1-2C)H^3+CH^2-AH-AC$$

$$= (-A+H^2-2H^3)(C+H)$$

$$DY_n(H,H+C) = \begin{pmatrix} -2H^4+(1-2C)H^3+CH^2-AH-AC & -H(1-H)(A+H^2) \\ B(A+H^2)(C+H) & -B(A+H^2)(C+H) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
DY_n(H, H+C) \\
&= BA^2C^2 - BA^2CH^2 + 3BA^2CH - BA^2H^3 + 2BA^2\,H^2 + 2BAC^2H^3 \\
&+ 2BACH^4 + 2BACH^3 + 2BAH^4 + \ 2BC^2H^5 - BC^2H^4 + 3BCH^6 \\
&- BCH^5 + BH^7 \\
&= \ B(C+H)(A+H^2)(-AH^2 - CH^2 + 2CH^3 + AC + 2AH + H^4)
\end{aligned}
$$

Su signo depende del factor

$d(A, C, H) = -AH^2 - CH^2 + 2CH^3 + AC + 2AH + H^4$

P.D. $d(A, C, H) = \ H^4 + 2CH^3 - (A+C)H^2 + 2AH + AC > 0.$

Cabe añadir que existe un único punto positivo, si y sólo si, $1 - Q \leq 0$, es decir,

$$1 - \frac{(1-H)(A+H^2)}{H(H+C)} = \frac{-A + AH + CH + H^3}{H(C+H)} \leq 0$$

$$-A + AH + CH + H^3 = -A + (A+C)H + H^3$$

Como $d(A, C, H)$ se puede reescribir como

$$
\begin{aligned}
d(A, C, H) &= H^4 - (A+C)H^2 + AH + AC + 2CH^{3\prime} + AH \\
&= H^4 - (A+C)H^2 + AH + AC + 2CH^{3\prime} + AH \\
&= -H^4 - (A+C)H^2 + AH + 2H^4 + AC + 2CH^{3\prime} + AH \\
&= (-H^3 - (A+C)H + A)H + 2H^4 + AC + 2CH^{3\prime} + AH > 0.
\end{aligned}
$$

Y la naturaleza de $(H, H+C)$ depende sólo de la traza.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}DY_n((H, H+C) &= \ (-A + H^2 - 2H^3)(C+H) - B(A+H^2)(C+H) \\
&= \ (C+H)(-A - BH^2 - AB + H^2 - 2H^3),
\end{aligned}
$$

Cuyo signo depende del factor

$$
\begin{aligned}
T(A, B, H) &= -A - BH^2 - AB + H^2 - 2H^3 \\
&= -\,(H^2 + A)B + (H^2 - 2H^3 - A)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto puede cambiar de signo, si y sólo si, $H^2 - 2H^3 - A > 0$, esto es, para $A > H^2(1 - 2H)$.

Se toma como bifurcación de Hopf [6], para

$$B = \frac{H^2 - 2H^3 - A}{H^2 + A}$$

Conclusión

En este trabajo se estudió parcialmente un modelo del tipo Leslie-Gower utlizando efecto Allee débil y diferentes respuestas funcionales. En el modelo se realizó una reparametrización y un reescalamiento del tiempo para obtener un sistema polinomial topológicamente equivalente y así poder simplificar los cálculos. Además, se prueba que las soluciones del sistema son acotadas usando la compactificación de Poincaré y también para mostrar que el modelo está bien propuesto, y con el objetivo de aplicar el Teorema de Poincaré-Bendixon; y se determinan las condiciones en el espacio de parámetros para que el único punto de equilibrio positivo sea un atractor o repulsor rodeado por al menos un ciclo límite.

Referencias bibliográficas

[1] A. Andronov, I. Leontovich, and G. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. A Halsted Press Book, John Wiley and Sons, 1973.

[2] C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, Texts in Applied Mathematics 34, Springer, 1999.

3] E. Conway and J. Smoller, Global Analysis of a system of Predator-Prey Equations. SIAM J. Applied Mathematics, Vol 46, N° 4, 630-642, 1986.

[4] L. Gallego Consecuencias del efecto Allee en el modelo de depredación de May-Holling-Tanner, Tesis de Maestría, Universidad del Quindío, Colombia, 2004

[5] O. González, P. Tintinago and A. Rojas, Leslie-Gower type predator-prey model with sigmoid functional response. International Journal of Computer Mathematics, Taylor and Francis, 2015.

[6] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.

[7] H. Meneses, and E. González, Consequences of the Allee effect on Rosenzweig-McArthur predator-prey model, In R. Mondaini (Ed.) Proceedings of the Third Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology, E-Papers Serviços Editoriais Ltda, Río de Janeiro, 2004, en prensa.

[8] V. Rai and W. Schaffer, Chaos in ecology, Chaos, Solitons and Fractals 12, 197-203, 2001.

[9] E. Sáez and E. González, Dynamics of a predator-prey model. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 59 Nº 5, pp. 1867-1878, 1999.

[10] R. Taylor, *Predation*, Chapman and Hall, 1984.

[11] P. Tintinago and A. González Class of Leslie-Gower type predator-prey model with sigmoid functional response, Proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical methods in Science and Engineering, CMMSE 2013.